26/11/18

Διαφορισιμότητα για συναρτήσεις πολλών μεταβλητών (πρώτα για πραγματικές)

Ορισμός (Μερική διαφορισιμότητα)
Η $f: U \to \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^n$ (με $n \geq 2$) ονομάζεται μερικώς διαφ/μη στο $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in U$ ως προς την i-οστή μεταβλητή (δηλ. x_i), αν υπάρχει η μερική παράγωγος της f στο $\bar{x}$ ως προς την i-οστή μεταβλητή.

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\bar{x} + h \cdot \bar{e}_i) - f(\bar{x})}{h} \in \mathbb{R} \quad (*)$$

όπου: $\bar{e}_i = (0, \ldots, 0, \underset{\text{i-θέση}}{1}, 0, \ldots, 0)$ (διάνυσμα βάσης του $\mathbb{R}^n$)

Παρατήρηση: Η $(*)$ είναι η παράγωγος στο $x \in \mathbb{R}$, της f ως συνάρτηση της i-οστής μεταβλητής και με τις υπόλοιπες μεταβλητές να είναι σταθερές και ίσες με x_j, $j \neq i$, στο $\bar{x}$.
Πιο συγκεκριμένα αν $f_i(x) = f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \ldots, x_n)$
Τότε: $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x}) = \lim_{h \to 0} \frac{f_i(x_i + h) - f_i(x)}{h}$
$[\bar{x} + h \cdot \bar{e}_i = (x_1, \ldots, x_n) + h(\underbrace{0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0}) =$
$= (0, \ldots, 0, h, 0, \ldots, 0) =$

$= f_i'(x_i)$

Άρα: Για να βρω το $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x})$, κρατάω όλα τα x_j, $j \neq i$ σταθερά και παραγωγίζω ως προς x_i.

Παραδείγματα: (α) $f(x,y) = e^{x^2+y^2}$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ έστω $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ ένα (τυχαίο, αλλά σταθερό) σημείο στον $\mathbb{R}^2$ και $f_1(x) = f(x,y_0) = e^{x^2+y_0^2}$ και $f_2(y) = e^{x_0^2+y^2}$

Τότε, $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{d}{dx}\left(e^{x^2+y_0^2}\right)\Big|_{x=x_0} = (e^{x^2+y_0^2})' = [2xe^{x^2+y_0^2}]|_{x=x_0}$

$= 2x_0 \cdot e^{x_0^2+y_0^2}$

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(e^{x^2+y^2}\right) = 2ye^{x^2+y^2}$

(β) $f(\bar{x}) = \|\bar{x}\|$, $\bar{x}\in\mathbb{R}^n$. Τότε $\forall i=1,\dots,n$ $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x}) = \frac{\partial}{\partial x_i}\sqrt{x_1^2+\dots+x_n^2}$

$= x_i^2 + \underbrace{(x_1^2+\dots+x_{i-1}^2+x_{i+1}^2+\dots+x_n^2)}_{c} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x_i^2+c}}2x_i = \frac{x_i}{\|\bar{x}\|}$

αν $\|\bar{x}\|\neq 0 \Leftrightarrow \bar{x}\neq 0$

SOS $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x}) = \frac{x_i}{\|\bar{x}\|}$, $\bar{x}\neq\bar{0}$, $\forall i=1,\dots,n$

Ορισμός: (Μερικώς Διαφορισιμότητας, ∇f)

Η $f: U\to\mathbb{R}$, $U\subset\mathbb{R}^n$ ανοικτό λέγεται μερικώς διαφορίσιμη στο $\bar{x}$, αν είναι μ.δ. στο $\bar{x}$ ως προς κάθε x_i, $i=1,\dots,n$ δηλ. αν υπάρχουν όλες οι μερ. παρ. της f στο $\bar{x}$ ως προς x_i

$\exists\ \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x})\in\mathbb{R}$ $\forall i=1,\dots,n$

Τότε το διάνυσμα $\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{x}),\dots,\frac{\partial f}{\partial x_n}(\bar{x})\right)\in\mathbb{R}^n$

ονομάζεται κλίση της f στο $\bar{x}$

[= βάθμωση της f στο $\bar{x}$]

Κλίση = $=: \operatorname{grad} f(\bar{x})$

$=: \nabla f(\bar{x})$

σύμβολο το οποίο δεν χρησιμοποιείται μόνο για την κλίση.

$$\nabla f(\bar{x}) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right) f(\bar{x}) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} f(\bar{x}), \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} f(\bar{x})\right) =$$

$$\nabla := \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$$

Όπου: $\frac{\partial}{\partial x_i} f(\bar{x}) = \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i}}_{:= \lim_{h \to 0} \frac{f(\bar{x}+h\bar{e}_i) - f(\bar{x})}{h}} (\bar{x}) = [\ = \partial x_i f(\bar{x})\ ]$

Το σύμβολο ∇ ονομάζεται ανάδελτα (nabla = άρπα στα εβραϊκά)

Ορισμός (Μερικής διαφορισιμότητας) C^1: Η $f: U \to \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό ονομάζεται μερικώς διαφορίσιμη, αν είναι μερικώς διαφορίσιμη σε κάθε $\bar{x} \in U$ [δηλ. αν υπάρχουν όλες οι $f(\bar{x})$ $\forall i = 1, \dots, n$ $\forall \bar{x} \in U$] και συνεχώς (μερικώς) διαφορίσιμη αν όλες οι μερ. παρ. υπάρχουν και είναι συνεχείς

Παραδείγματα: Η $f(x,y) = e^{x^2+y^2}$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ είναι μερικώς διαφορίσιμη σε κάθε $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ με κλίση

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) =$$

$= \left(2x \cdot e^{x^2+y^2},\ 2y\, e^{x^2+y^2}\right)$ άρα μερικώς διαφορίσιμη $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

δηλ., $\exists\ \frac{\partial f}{\partial x} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\underset{\in \mathbb{R}^2}{(x,y)} \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}$

και $\frac{\partial f}{\partial y} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ και είναι συνεχείς, δηλ. η f είναι συνεχώς (μερικώς) διαφορίσιμη

→ (οι μερικές παράγωγοι)

Θέμα εξετάσεων: (SOS). Έστω η $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Εξετάστε σε κάθε σημείο $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ την f ως προς την συνέχεια, μερική διαφορισιμότητα, και [σε κάθε ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$] ως προς τη συνεχή (μερική) διαφορισιμότητα.

Ορισμός: Η $f: U \to \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^n$, ανοικτό, $\bar{x} \in U$, ονομάζεται συνεχώς (μερικώς) διαφορίσιμη στο $\bar{x}$, αν υπάρχει ένα $B(\bar{x}, \varepsilon) \subset U$, έτσι ώστε η $f(B(\bar{x}, \varepsilon))$ να είναι συνεχώς μερικώς διαφ.